

Exercices – Séquence n° 12 – ESPACE (III) : représentations paramétriques, équations cartésiennes

Contenu	• Représentation paramétrique d'une droite. • Équation cartésienne d'un plan.
Capacités	• Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. • Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique. • Déterminer une équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. • Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan. • Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur. • Dans un cadre géométrique, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans, ...). • Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter géométriquement les solutions.

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER

Sauf mention contraire dans les exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1 [Ra-Ca-Co]

On considère les points $E(1; 0; 3)$, $F(3; -1; 2)$ et $M(a; b; -2)$ où a et b sont des réels.

- 1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF).
- 2) Existe-t-il des valeurs de a et b pour lesquelles le point M appartient à la droite (EF) ?

Exercice 2 [Ch-Ra-Co]

Étudier la position relative des droites :

- 1) $(d_1) : \begin{cases} x = 4 - 6t \\ y = -1 - 8t \\ z = -22 + 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $(d_2) : \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = 4t' \\ z = 3 - 3t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.
- 2) $(d_3) : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $(d_4) : \begin{cases} x = -1 + t' \\ y = -t' \\ z = -1 - t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 [Ra-Ca-Co]

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $A(3; 1; -2)$ et dont $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

- 1) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
- 2) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ passant par le point $B(-5; 0; 7)$ et parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 4 [Ra-Ca-Co]

- Déterminer une équation cartésienne :
 - du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(5; 3; -2)$ et dont $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.
 - du plan $\mathcal{P}'$ passant par le point $B(-2; 5; 10)$ et dont $\vec{j}$ est un vecteur normal.
- Justifier que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants puis déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

Exercice 5 [Ra-Ca-Co]

On considère les points $F(1; 2; 0)$, $N(2; 3; 0)$, $A(-1; -2; -1)$ et $C(-1; 0; -2)$.

- Vérifier que les points F , C et N définissent un plan puis en déterminer une équation cartésienne.
- Les points F , N , A et C sont-ils coplanaires ?

Exercice 6 [Ra-Ca-Co]

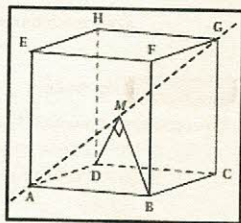
- Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 4y - 5z - 16 = 0$ et de la droite d dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 4 - t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$
- Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}'$ d'équation $2x + y - 2z - 8 = 0$ et de la droite d' dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 3 + 2t' \end{cases} \text{ avec } t' \in \mathbb{R}.$$
- Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}''$ d'équation $x - y + z + 1 = 0$ et de la droite d'' dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1 - t'' \\ y = 4 + t'' \\ z = 2 + 2t'' \end{cases} \text{ avec } t'' \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 [Ra-Ca-Co]

Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-contre dans lequel M est un point de la droite (AG) dont une représentation paramétrique, dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Combien existe-t-il de positions du point M sur la droite (AG) telles que les droites (MB) et (MD) soient orthogonales ?

**Exercice 8** [Ra-Ca-Co]

Justifier que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives $-x + y - z + 2 = 0$ et $5x - 7y + 4z - 3 = 0$ sont sécants puis déterminer leur intersection.

Exercice 9 [Ra-Ca-Co]

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A(1; -2; -1)$ et $B(3; -5; -2)$.

- Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$
- $\mathcal{D}'$ est la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$
 Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.
- On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.
 - Montrer que le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$.
 - Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}'$ se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

- 4) On considère la droite Δ passant par le point C et dont $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.
- Montrer que les droites Δ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires.
 - Montrer que la droite Δ coupe perpendiculairement la droite $\mathcal{D}$ en un point E dont on précisera les coordonnées.

Exercice 10 [Ra-Ca-Co]

On considère les points A(1; 1; 14), B(0; 1; 8) et C(-2; 2; 4) ainsi que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
- Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).
- Soit M(x; y; z) un point de l'espace.
 - A quelle condition nécessaire et suffisante sur les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{n}$, le point M appartient-il au plan (ABC)?
 - En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
- On considère la droite Δ dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -\frac{1}{2} + t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 - Donner un vecteur directeur de la droite Δ .
 - La droite Δ et le plan (ABC) sont-ils sécants? Justifier.
- Dans cette question, on considère l'ensemble (E) des points M dont les coordonnées (x; y; z) sont données par :
$$\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = t + 1 \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Démontrer qu'il existe un unique point M qui appartient à la fois à (E) et au plan (ABC). (Coordonnées de M inutiles).

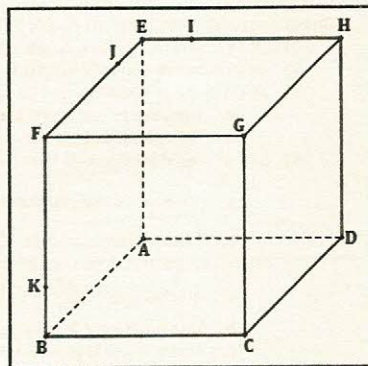
Exercice 11 [Re-Ra-Ca-Co]

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre ainsi que les trois points I, J et K définis par :

$$\vec{EI} = \frac{1}{4}\vec{EH}, \quad \vec{EJ} = \frac{1}{4}\vec{EF} \quad \text{et} \quad \vec{BK} = \frac{1}{4}\vec{BF}$$

On se place dans le repère orthonormé (A; $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$).

- Sans justifier, donner les coordonnées des points I, J et K.
- Démontrer que le vecteur $\vec{AG}$ est normal au plan (IJK).
- Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x + 4y + 4z - 5 = 0$
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
- En déduire les coordonnées du point d'intersection L de la droite (BC) avec le plan (IJK).
- Sur la figure ci-contre, placer le point L puis construire l'intersection du plan (IJK) avec la face BCGF.
- Soit M($\frac{1}{4}$; 1; 0). Les points I, J, L et M sont-ils coplanaires?

**Exercice 12** [Ra-Ca-Co]

Soient A(-1; 2; 3) et d la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

- Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à la droite d et passant par le point A.
- Vérifier que le point B(-3; 3; -4) appartient à la droite d .
- Soit M un point de la droite d .

Exprimer AM^2 en fonction de t puis en déduire la distance du point A à la droite d .

Exercice 13 [Ra-Ca-Co]

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.

Soient I, J et K les points tels que :

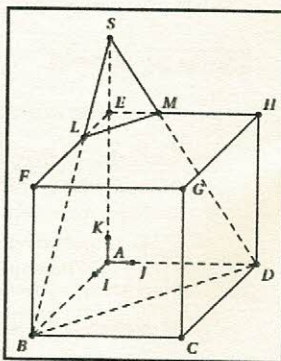
$$I \in [AB], J \in [AD], K \in [AE] \text{ et } AI = AJ = AK = 1.$$

L'unité graphique représente 1 mètre.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$
 - M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
 - S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).
- 1) **SANS calcul de coordonnées**, justifier que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.
 - 2) Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2; 0; 6)$.
 - 3) Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).
 - 4) Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0; 0; 9)$.
 - 5) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 - a. Vérifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).
 - b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est $3x + 3y + 2z - 18 = 0$.
 - c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \end{cases} (s \in \mathbb{R})$.



Déterminer les coordonnées du point M.

- 6) Calculer le volume du tétraèdre SELM.
- 7) L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60° . Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

Exercice 14 [Ra-Ca-Co]

On considère les points $A(0; 0; 2)$, $B(0; 4; 0)$, $C(2; 0; 0)$.

- 1) Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est $2x + y + 2z - 4 = 0$.
- 2) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et orthogonal à la droite (BC).
- 3) Soit Δ la droite d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan (ABC).
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
 - b. Quel rôle joue la droite Δ dans le triangle ABC ?
- 4) Soit Δ' la médiane issue de B du triangle ABC.
 - a. Montrer qu'une représentation paramétrique de Δ' est : $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
 - b. Montrer que le triangle ABC est isocèle.
- 5) Soit H le point d'intersection des droites Δ et Δ' .
 - a. Montrer que : $H\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$.
 - b. Que représente le point H pour le triangle ABC ?
 - c. Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
 - d. Déterminer alors la distance du point O au plan (ABC).

Exercice 15 [Ch-Ra-Ca-Co]

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1; 1; 3)$, $B(-1; 3; 0)$ et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

- Montrer que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$ mais que le point B appartient à la droite $\mathcal{D}$.
- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.
- On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$.
 - Montrer que le point H a pour coordonnées $(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9})$.
 - En déduire la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.
- Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.
 - Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k \vec{u}$.
 - Montrer que $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.
 - Calculer la valeur du nombre réel k puis retrouver les coordonnées du point H.
- On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$ u. v. Calculer l'aire du triangle ACH.

Exercice 16 [Ra-Ca-Co]

Une maison est constituée d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'un prisme EFIHG] dont une base est le triangle EIF isocèle en I. Cette maison est représentée ci-contre.

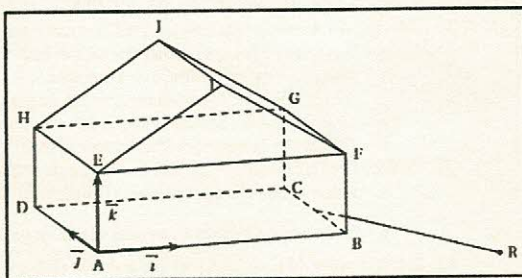
On donne $AB = 3$, $AD = 2$, $AE = 1$ et on définit les vecteurs $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.

On munit ainsi l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EHI).

Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).

- En déduire les coordonnées du point I.
- Déterminer la mesure, arrondie au degré près, de l'angle $\widehat{EIF}$.
- Afin de raccorder la maison au réseau électrique, on souhaite creuser une tranchée rectiligne depuis un relais électrique situé en contrebas de la maison. Le relais est représenté par le point R(6; -3; -1).



La tranchée est assimilée à un segment d'une droite Δ passant par R et dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On souhaite vérifier que la tranchée atteindra la maison au niveau de l'arête [BC].

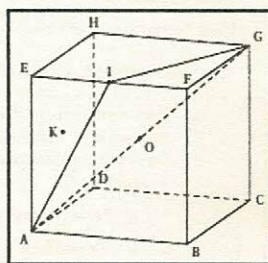
- Donner une représentation paramétrique de la droite Δ .
- Déterminer une équation cartésienne du plan (BFG).
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite Δ avec le plan (BFG).
- Le point K appartient-il bien à l'arête [BC] ?

Exercice 17 [Ra-Ca-Co]

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre d'arête de longueur 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Le point I est le milieu du segment [EF], K est le centre du carré ADHE et O est le milieu du segment [AG].

Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG).

**Partie A : Première méthode**

- 1) Sans justifier, donner les coordonnées des points A, B, G, I et K.
- 2) Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).
- 3) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est $2x - y - z = 0$.
- 4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BK).
- 5) En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $L(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.
- 6) Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

Partie B : Deuxième méthode

- 7) Justifier que, dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.
- 8) En déduire le volume du tétraèdre ABIG.
- 9) Démontrer que l'aire du triangle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.
- 10) En déduire la distance du point B au plan (AIG).

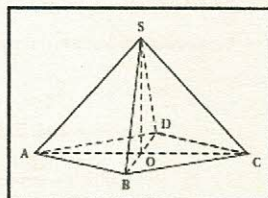
Exercice 18 [Ch-Ra-Ca-Co]

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.

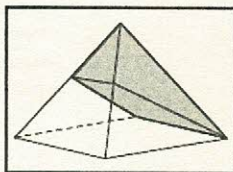
Les diagonales du carré ABCD, dont le centre est noté O, mesurent 24 cm.

On admettra que la hauteur OS est telle que : $OS = OA$.

On considère le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS})$.



- 1) Calculer le volume de la pyramide SABCD, en cm^3 puis en unités de volume.
- 2) On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].
 - a. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, P, Q et S.
 - b. Déterminer une équation cartésienne du plan (PQC).
 - c. Montrer que les droites (PQ) et (CD) sont parallèles.
 - d. En déduire la nature du quadrilatère PQCD.
- 3) On note I et J les milieux respectifs des segments [PQ] et [CD].
 - a. Montrer que IJ est la hauteur du trapèze PQCD puis donner sa valeur.
 - b. En déduire que l'aire du trapèze PQCD, en unités d'aire, est égale à $\frac{3\sqrt{11}}{8}$.
- 4) Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).
 - a. Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).
 - b. Déterminer les coordonnées du point H.
 - c. Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur, est égale à $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.
- 5) Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Delphine et Stéphanie, Madame BLANCHE a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm. Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors que Stéphanie arrête son geste et lui propose une découpe plus originale : « Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ». Delphine doute, les parts ne lui semblent pas équitables. Qu'en penser ? Justifier.



Exercice 19 [Ch-Ra-Ca-Co]

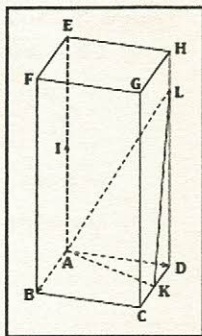
Soit ABCDEFGH le pavé droit ci-contre tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$.
Le point I est le milieu du segment [AE], K celui du segment [CD].

Le point L est défini par $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
- Déterminer une équation cartésienne du plan (AKL).
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
- En déduire que les coordonnées du point N, intersection de la droite Δ et du plan (AKL), sont $(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49})$.
- Calculer l'aire du triangle ADK puis le volume du tétraèdre LADK.
- Calculer la distance du point D au plan (AKL).
- Des questions précédentes, déduire l'aire du triangle AKL.
- Soient P et Q les points définis respectivement par $\overrightarrow{LP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{LA}$ et $\overrightarrow{LQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{LK}$.

Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$ puis en déduire le volume du tétraèdre DLPQ.

**Exercice 20** [Ch-Ra-Ca-Co]

Alex et Élixa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.

On considère un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, une unité correspondant à 10 mètres.

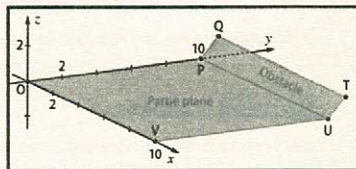
Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère :

$O(0; 0; 0)$; $P(0; 10; 0)$; $Q(0; 11; 1)$; $T(10; 11; 1)$; $U(10; 10; 0)$ et $V(10; 0; 0)$

La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.

Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :

- le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec $A(2; 4; 0,25)$ et $B(2; 6; 0,75)$;
- le drone d'Élixa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec $C(4; 6; 0,25)$ et $D(2; 6; 0,25)$.

**Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex**

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
- Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQU).
- En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).
- Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $(2; \frac{37}{3}; \frac{7}{3})$.
- Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élixa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.

L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée. Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD) ; il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = b\overrightarrow{CD}$.

On s'intéresse donc à la distance MN.

- Démontrer que les deux trajectoires ne sont pas coplanaires.
- Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $\begin{pmatrix} 2-2b \\ 2-2a \\ -0,5a \end{pmatrix}$.
- Démontrer que $MN^2 = (2-2b)^2 + \frac{17}{4}(a - \frac{16}{17})^2 + \frac{4}{17}$.
- En déduire les valeurs des réels a et b telles que la distance MN soit minimale puis conclure.
- Quelle est alors la position relative des droites (MN) et (AB) ? des droites (MN) et (CD) ?

Pour réviser

Exercice 21 [Ra-Ca-Co]

- 1) D et D' sont les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 3 - 4t' \\ y = 4t' \\ z = 2 + 4t' \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}.$$

Les droites D et D' sont-elles parallèles, orthogonales, ou ni l'un, ni l'autre ?

- 2) Reprendre la question précédente avec les représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 - 4t' \\ y = 2 - 10t' \\ z = 6t' \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}.$$

Exercice 22 [Ra-Ca-Co]

- Déterminer une équation cartésienne du plan (P₁) médiateur du segment [AB] avec A(0 ; 3 ; -1) et B(4 ; 5 ; -3).
- Le point C(2 ; 0 ; 1) appartient-il au plan (P₁) ?
- Soit M un point de l'espace tel que AM = BM = 2.
Déterminer une équation du plan passant par le point M et orthogonal à la droite (AB).

Exercice 23 [Ch-Ra-Ca-Co]

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(2 ; 0 ; 1) ; B(1 ; 2 ; -1) et C(-3 ; 1 ; 2).

- Démontrer que les points A, B et C définissent un seul plan.
- Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).
- Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 24 [Ch-Ra-Ca-Co]

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(3 ; 1 ; -1) ; B(1 ; 2 ; -2) et C(4 ; 2 ; 1).

- Démontrer que les points A, B et C définissent un seul plan.
- À l'aide d'un système (sans utiliser de vecteur normal au plan), déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 25 [Ch-Ra-Ca-Co]

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(2 ; 5 ; -1) et B(4 ; 1 ; -3).

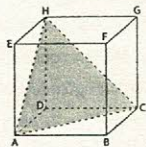
- Déterminer une équation de la sphère S de diamètre [AB].
- Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en A.

Exercice 26 [Ra-Ca-Co]

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite orthogonale au plan (P) d'équation $2x - y + z + 5 = 0$ et passant par A(2 ; 1 ; 0).
- Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (P).
- En déduire la distance du point A au plan P.

Exercice 27 [Ch-Re-Ra-Ca-Co]

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté ci-contre.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.



- Déterminer une équation cartésienne du plan (ACH).
- On note d la droite passant par le point F et orthogonale au plan (ACH).
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
 - Calculer les coordonnées du projeté orthogonal K du point F sur le plan (ACH).
- Calculer la distance du point F au plan (ACH).

Pour aller plus loin

Exercice 28 [Ch-Ra-Ca-Co]**Partie A**

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

- Démontrer que, pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.
- En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

Partie B

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :
A(3; 0; 0); B(0; 6; 0); C(0; 0; 4) et D(-5; 0; 1).

- Vérifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), puis déterminer une équation du plan (ABC).
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ), orthogonale au plan (ABC) passant par le point D.
 - En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
 - Calculer la distance du point D au plan (ABC).
 - Démontrer que le point H appartient à l'ensemble (E) défini dans la partie A.

Exercice 29 [Ch-Ra-Ca-Co]

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A(2; 1; 3); B(-3; -1; 7) et C(3; 2; 4).

- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- (D) est la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
 - Montrer que (D) est orthogonale au plan (ABC).
 - Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite (D) et du plan (ABC).
 - Déterminer des nombres réels non nuls a, b et c tels que $a \overrightarrow{HA} + b \overrightarrow{HB} + c \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.
- Déterminer la nature de l'ensemble des points M de l'espace tels que $(-2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2 \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$.

Exercice 30 [Ch-Ra-Ca-Co]

On considère les points $A(-2 ; 0 ; 1)$, $B(1 ; 2 ; -1)$ et $C(-2 ; 2 ; 2)$.

- 1) En calculant de deux manières différentes $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.
- 2) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- 3) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 2z + 2 = 0$.
- 4) Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations cartésiennes respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- 5) Démontrer que la droite d et le plan (ABC) sont sécants en un point dont on déterminera les coordonnées.
- 6) Soient $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(1 ; -3 ; 1)$ et de rayon $r = 3$ et $M(x ; y ; z)$ un point de l'espace.
 - a. A quelle condition, nécessaire et suffisante, le point $M(x ; y ; z)$ appartient-il à la sphère $\mathcal{S}$?
 - b. En déduire une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.
 - c. Étudier l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite d .
 - d. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.